

Symmetrie – Wiederholung in der Geometrie

Referat am Kolloquium *Wiederholung* der
Schweiz. Ges. für Symbolforschung

Martin Huber

Symmetrie – Wiederholung in der Geometrie

Ablauf

1. Wiederholung in der Mathematik
2. Kongruenz – Kongruenztransformationen
3. Symmetrie – Zur Bedeutung eines Begriffs
4. Ebene symmetrische Figuren (Ornamente)
5. Die Idee der Symmetriegruppe
6. Einfaches Beispiel
7. Klassifikation der Ornamente nach ihrer Symmetriegruppe

Wiederholung in der Mathematik

Mathematik: Wiederholung vermeiden durch Abstraktion und Formalisierung

Beispiel:
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\begin{aligned}5^2 - 4^2 &= (5 - 4)(5 + 4) = 9 = 3^2 \\13^2 - 12^2 &= (13 - 12)(13 + 12) = 25 = 5^2 \\25^2 - 24^2 &= (25 - 24)(25 + 24) = 49 = 7^2 \\41^2 - 40^2 &= (41 - 40)(41 + 40) = 81 = 9^2 \\61^2 - 60^2 &= (61 - 60)(61 + 60) = 121 = 11^2 \\&\dots\dots\end{aligned}$$

Wiederholung in der Mathematik

Verallgemeinerung? Ja, Gleichungen von hinten her lesen!

$$3^2 = (5 - 4)(5 + 4) = 5^2 - 4^2$$

$$5^2 = (13 - 12)(13 + 12) = 13^2 - 12^2$$

$$7^2 = (25 - 24)(25 + 24) = 25^2 - 24^2$$

.....

Allgemein: ungerade Zahlen sind von der Form $2n + 1$

$$\begin{aligned}(2n + 1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= \left[(2n^2 + 2n + 1) - (2n^2 + 2n) \right] \left[(2n^2 + 2n + 1) + (2n^2 + 2n) \right] \\ &= (2n^2 + 2n + 1)^2 - (2n^2 + 2n)^2 \\ &= (2n^2 + 2n + 1)^2 - (2n(n + 1))^2\end{aligned}$$

Wiederholung in der Mathematik

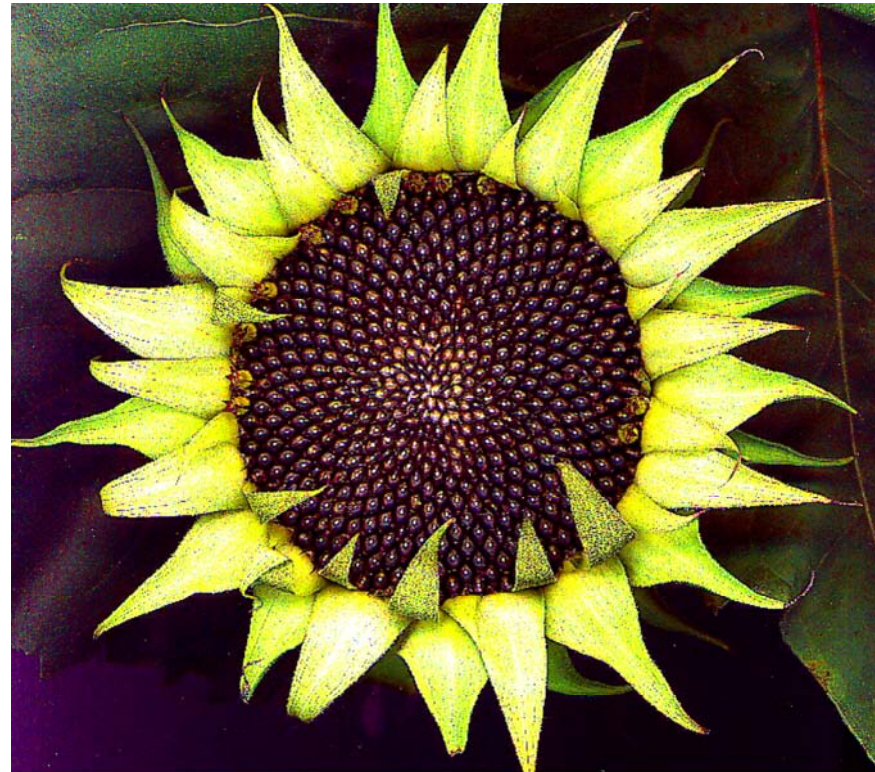
Mathematik und Naturwissenschaften befassen sich oft mit *Mustererkennung*. Muster können erkannt und klassifiziert werden dank den in ihnen vorkommenden Wiederholungen.

Ich möchte mich hier mit *ebenen geometrischen Mustern* befassen. Zudem sollen diese symmetrisch sein. Was der Symmetriebegriff alles beinhaltet, dazu kommen wir etwas später.

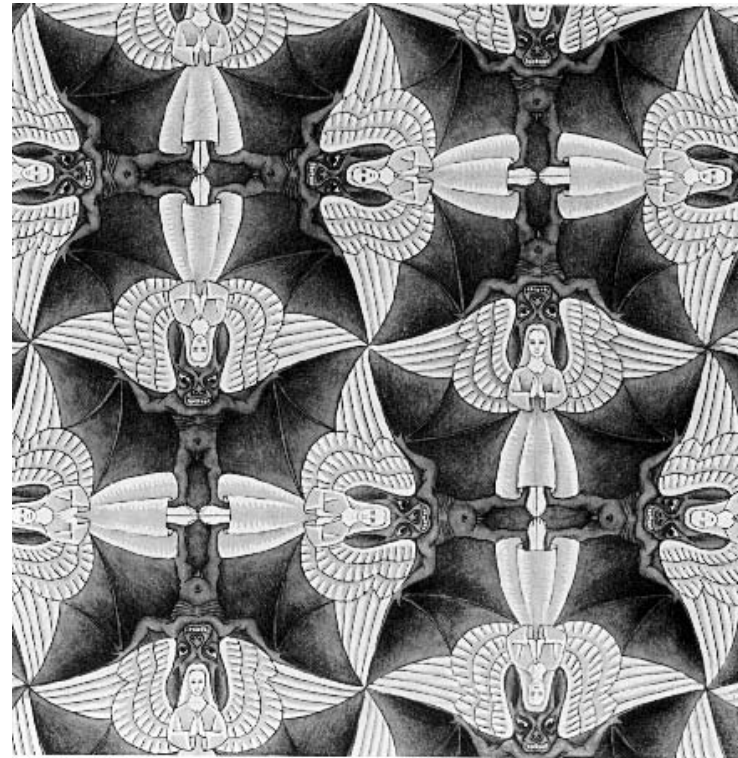
Geometrische Muster mit Wiederholungen



Geometrische Muster mit Wiederholungen



Geometrische Muster mit Wiederholungen



Geometrische Muster mit Wiederholungen



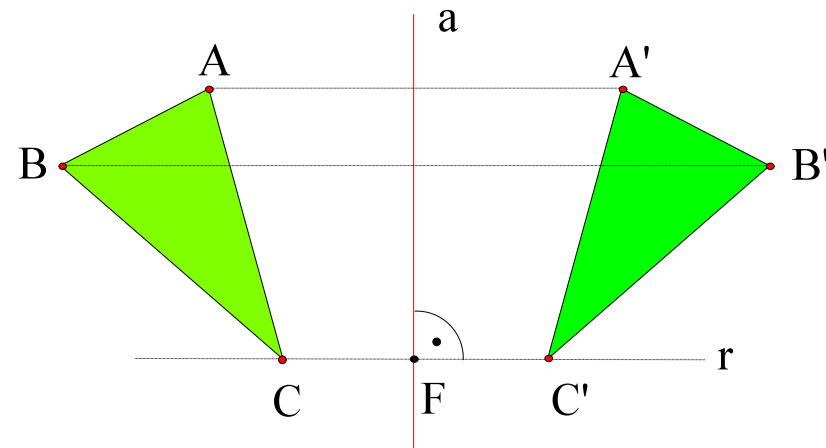
Kongruenz – Kongruenztransformationen

Eine **Kongruenz-Transformation** ist eine Abbildung der (Euklidischen) Ebene auf sich, welche Längen und Winkel *invariant* (unverändert) lässt.

1. Geradenspiegelung

Eine Geradenspiegelung ist gegeben durch eine Gerade a , die **Achse der Spiegelung**. Jedem Punkt P der Ebene wird das Spiegelbild P' bezüglich der Achse a als **Bildpunkt** zugeordnet.

Bezeichnung: S_a

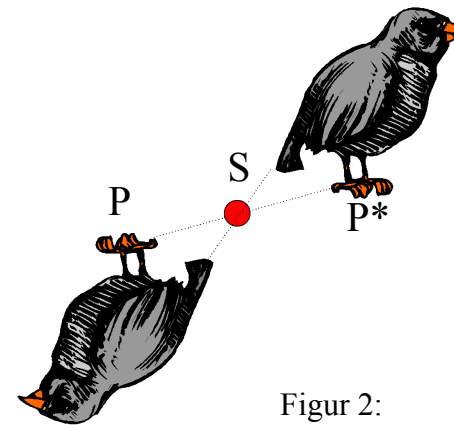


Kongruenztransformationen

2. Punktspiegelung

Eine Punktspiegelung ist gegeben durch einen Punkt S , das **Zentrum** der Spiegelung. Jedem Punkt P der Ebene wird das Spiegelbild P' bezüglich des Punktes S als Bildpunkt zugeordnet.

Bezeichnung: S_S



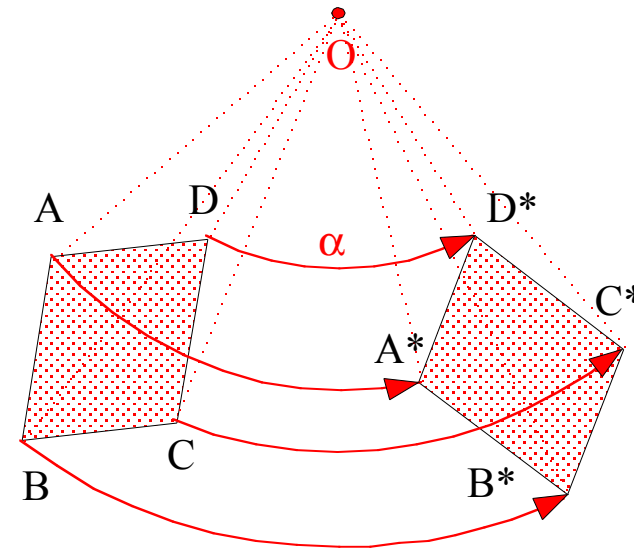
Figur 2:
Punktspiegelung

Kongruenztransformationen

3. Drehung oder Rotation

Eine Drehung (Rotation) ist gegeben durch einen Punkt O , das **Drehzentrum** und einen (orientierten) Winkel α , den **Drehwinkel**. Jedem Punkt P der Ebene wird der um das Zentrum O mit dem Winkel α gedrehte Punkt P' zugeordnet.

Bezeichnung: $R_{O,\alpha}$



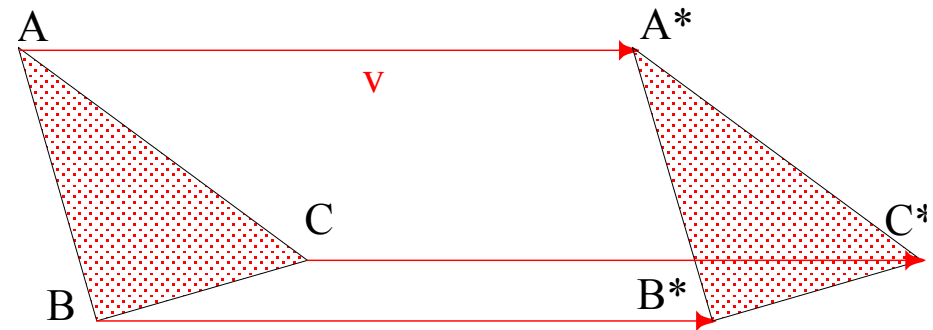
Figur 3: Rotation

Kongruenztransformationen

4. Parallelverschiebung oder Translation

Eine Translation ist gegeben durch einen **Vektor** v (d.h. durch eine Klasse parallel-gleicher gerichteter Strecken). Jedem Punkt P wird der um den Vektor v verschobene Punkt P' zugeordnet.

Bezeichnung: T_v



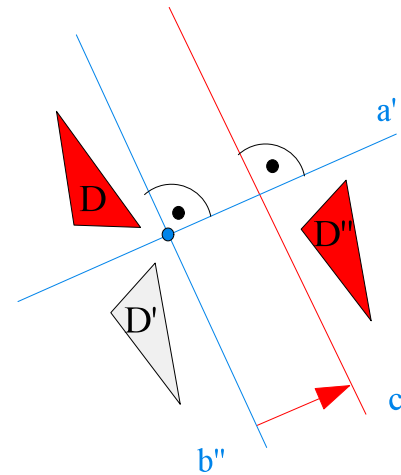
Figur 4: Translation

Kongruenztransformationen

5. Schubspiegelung oder Gleitspiegelung

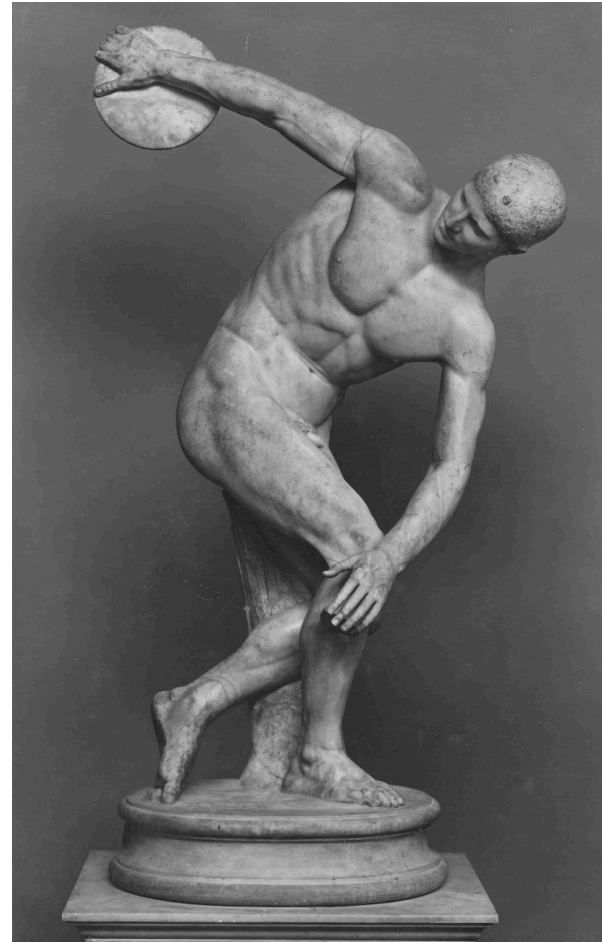
Eine Schubspiegelung ist gegeben durch einen Vektor v und eine (dazu parallele) Gerade a . Jedem Punkt P wird der an a gespiegelte und um v verschobene Punkt P' zugeordnet.

Bezeichnung: $S_{a,v}$



Symmetrie – Zur Bedeutung eines Begriffs

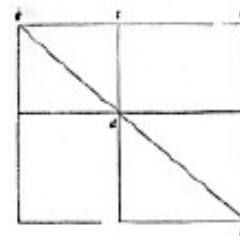
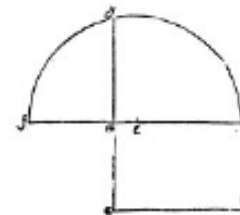
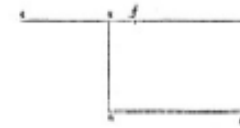
- Das Wort *Symmetrie* stammt aus dem Altgriechischen: *συμμετρία* ist zusammengesetzt aus *συμ* (mit) und *μέτρον* (Maß).
- Bedeutungswandel im Lauf der Jahrhunderte
- **Antike:** Symmetrie bezeichnet die wechselseitige Entsprechung der Teile eines Ganzen zueinander, auch das *Ebenmass* oder *Mittelmaß*. (Galen: Das Mittlere ist der Seelenzustand, der von beiden Extremen gleich weit entfernt ist.)



Symmetrie – Zur Bedeutung eines Begriffs

Mittelbildung in der griechischen Mathematik: neben dem *arithmetischen*, *geometrischen* und *harmonischen* Mittel waren sieben weitere sog. Medietäten geläufig.

(Figur aus dem ersten der vier Bücher zur Architektur von Andrea Palladio)



Symmetrie – Zur Bedeutung eines Begriffs

→ Gleichgewicht → Balkenwaage

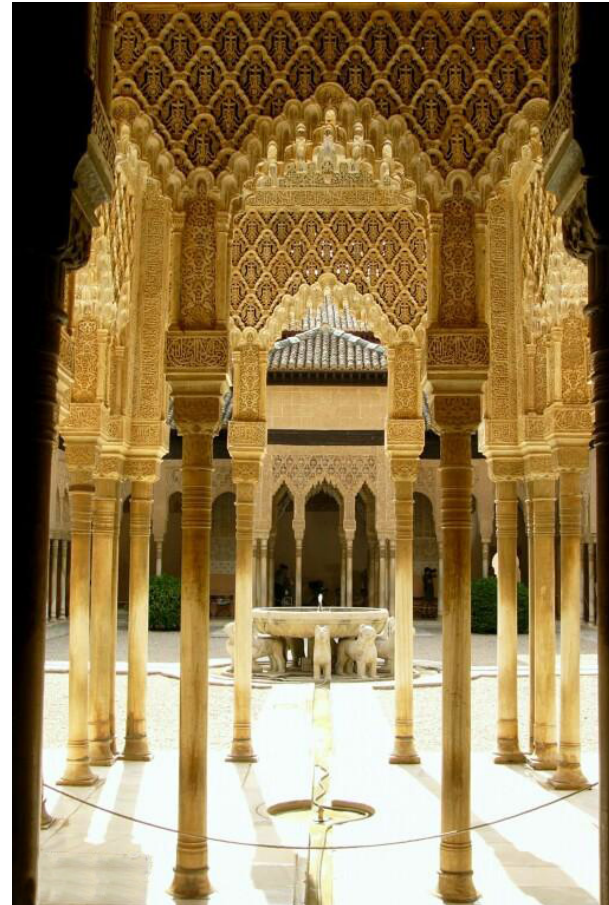
Bilaterale Symmetrie oder
Spiegelgleichheit

Bilaterale Symmetrie ist ein
präziser Begriff – im Gegensatz
zu den vagen antiken
Vorstellungen.

Im Alltag ist das Verständnis
dieses Aspekts der Symmetrie
meistens hinreichend.



Symmetrie – Zur Bedeutung eines Begriffs



Symmetrie – Zur Bedeutung eines Begriffs

Die weitere Entwicklung des Symmetriebegriffs erfolgte im Rahmen von *Mathematik* und *Naturwissenschaften*.

Eine ebene bilaterale Symmetrie wird von einer *Geradenspiegelung* erzeugt.

Eine ebene geometrische Figur heißt nun **symmetrisch**, falls sie **invariant** ist unter irgendeiner Kongruenz-Transformation. D.h., dass die Figur bei dieser Transformation mit sich selbst zur Deckung gebracht wird. Dabei ausgeschlossen wird die *identische* Transformation.

Eine Kongruenz-Transformation, die eine Figur invariant lässt, nennen wir **Symmetrietransformation** oder einfach **Symmetrie** dieser Figur.

Ebene symmetrische Figuren (Rosetten)

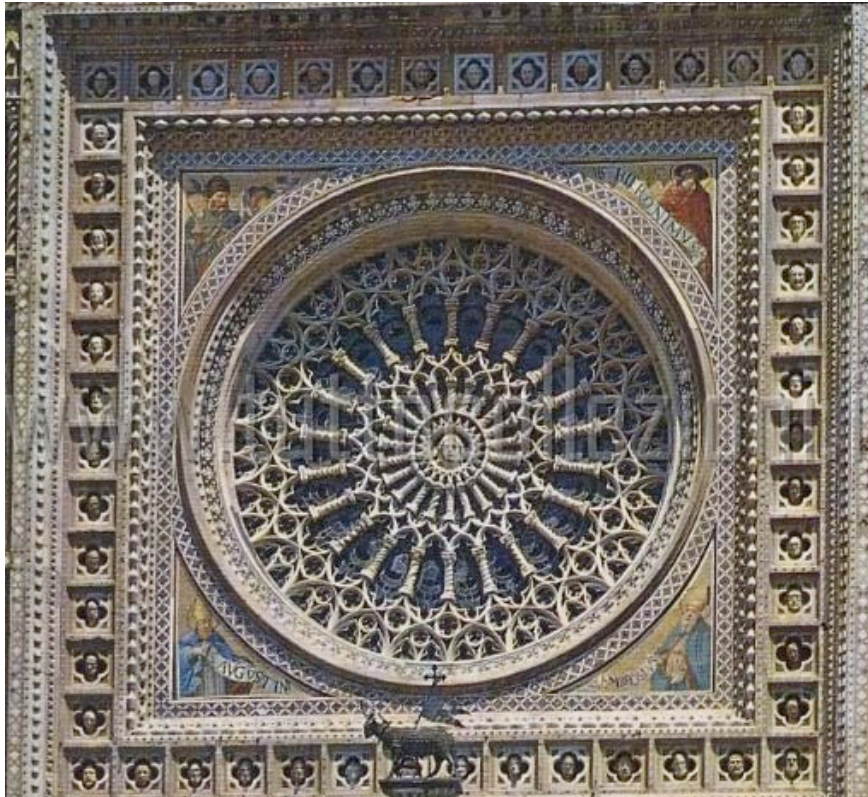
a) Rosetten

Eine Rosette ist eine ebene symmetrische Figur, die als Symmetrietransformationen nur Drehungen oder Geraden-spiegelungen zulässt.

Abgesehen von der Identität besitzt eine Rosette somit keine Translation als Symmetrietransformation.



Ebene symmetrische Figuren (Rosetten)



Rosone di Orvieto (22-teilig)



Rosone di Levanto (14-teilig)

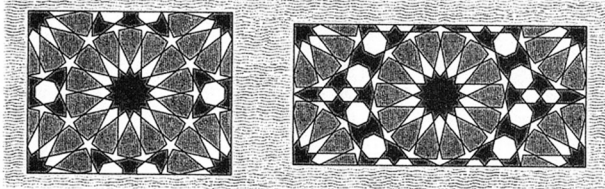
Ebene symmetrische Figuren (Rosetten)

PERFECT FOURTEEN

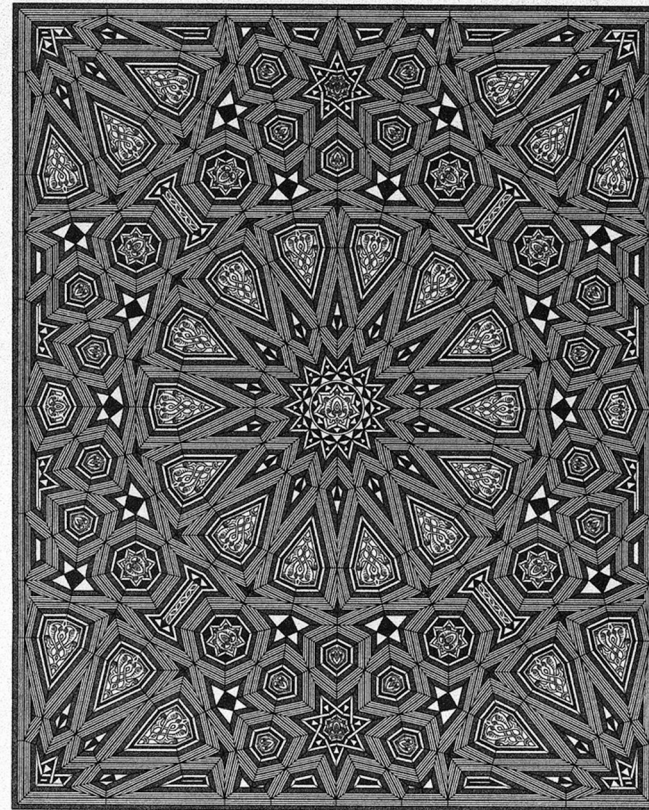
number of the prophet

The patterns shown here are based on fourteen-fold rosettes, the petals of which fit within the central star in the same way that the petals on page 37 fit within their central ten-fold star. However, the proportions inherent to the heptagram and the tetradecagonal star are more complex than the unique golden section found in the pentagram and the decagonal star, and, as a result, they can easily combine to fall out of synchronization with each other. Patterns in this fourteen-fold family are thus much harder to design successfully and are consequently much rarer. Two basic patterns are shown below. The more intricate pattern shown opposite is rendered as it is found in a carpentry panel at the mausoleum of the Mamluk Sultan Qaytbay (d. 1496 C.E.) in Cairo.

In the Islamic calendar the month begins on the evening of the new crescent's sighting, making the fourteenth of the month the night of the full moon, when the moon reflects the sun's light most fully on the Earth (the moon can also appear full on either the thirteenth or fifteenth). Accordingly the Prophet Muhammad, held to be the mirror of Divine Light within creation, is associated with both the full moon and the number fourteen.



40



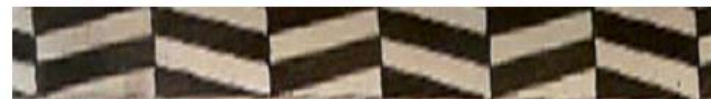
41

Ebene symmetrische Figuren (Bandornamente)

b) **Bandornamente** oder **Friese**

Ein Bandornament oder Fries ist eine ebene symmetrische Figur, die als Symmetrietransformationen Translationen mit *einer* festen Richtung besitzt und (allenfalls) Geraden Spiegelungen oder Drehungen zulässt.

Beachte: Bandornamente sind in Richtung der Translationen unendlich ausgedehnt zu denken!



Friese in Pyrgí (Chios, Griechenland)

Ebene symmetrische Figuren (Bandornamente)

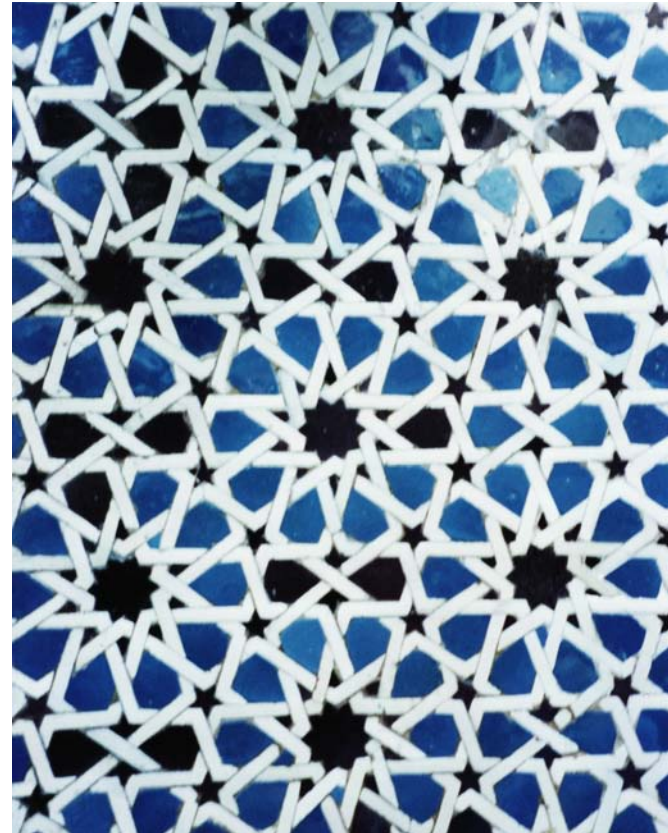


Ebene symmetrische Figuren (Flächenornamente)

c) **Flächenornamente** oder **Wandmuster**

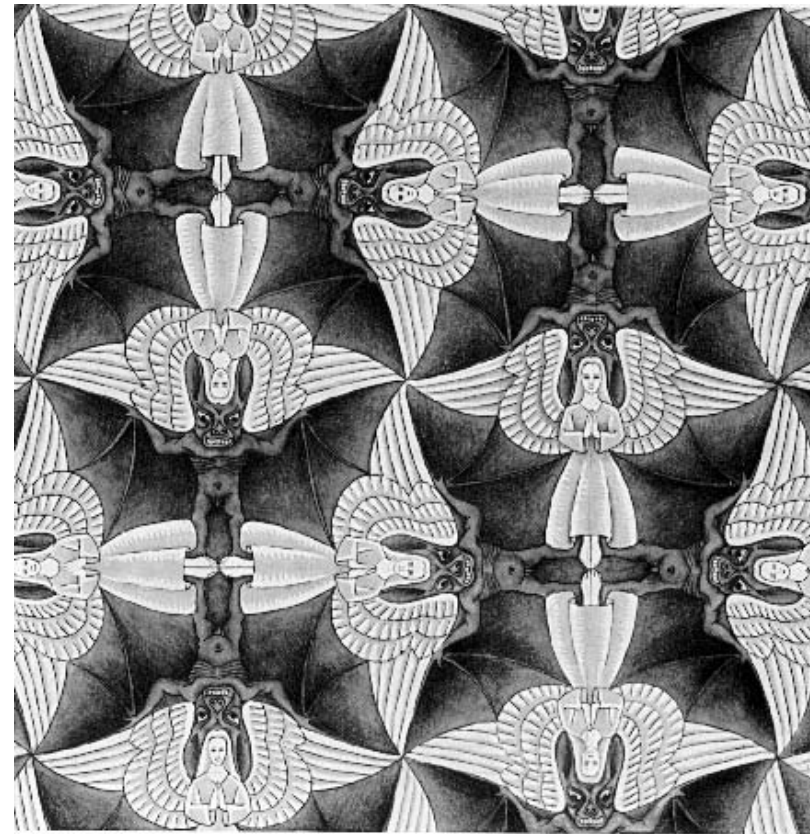
Ein Flächenornament oder Wandmuster ist eine ebene symmetrische Figur, die als Symmetrietransformationen Translationen mit zwei verschiedenen Richtungen besitzt und (allenfalls) Geradenspiegelungen und Drehungen zulässt.

Beachte: Flächenornamente sind unendlich ausgedehnt zu denken!



Mosaik: Alhambra (Granada, Spanien)

Ebene symmetrische Figuren (Flächenornamente)

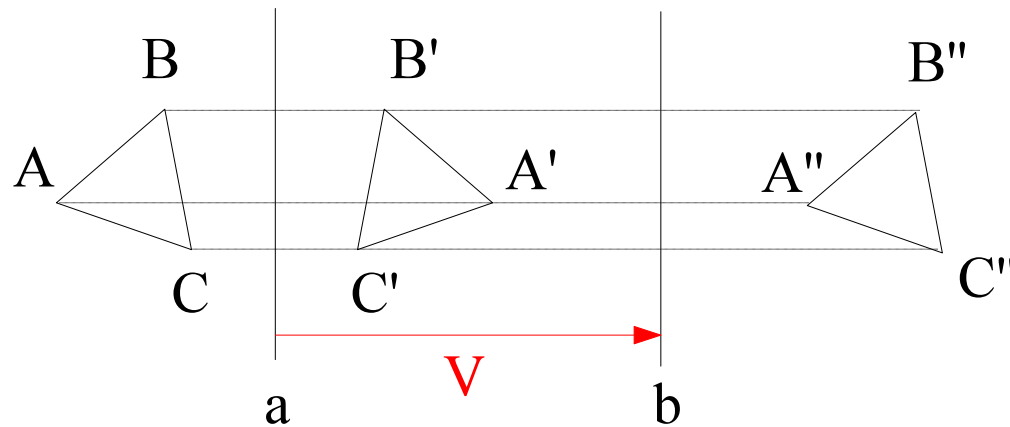


Die Idee der Symmetriegruppe

Kongruenztransformationen können verknüpft (zusammengesetzt) werden. Beim Verknüpfen von zwei Kongruenztransformationen entsteht wieder eine Kongruenztransformation.

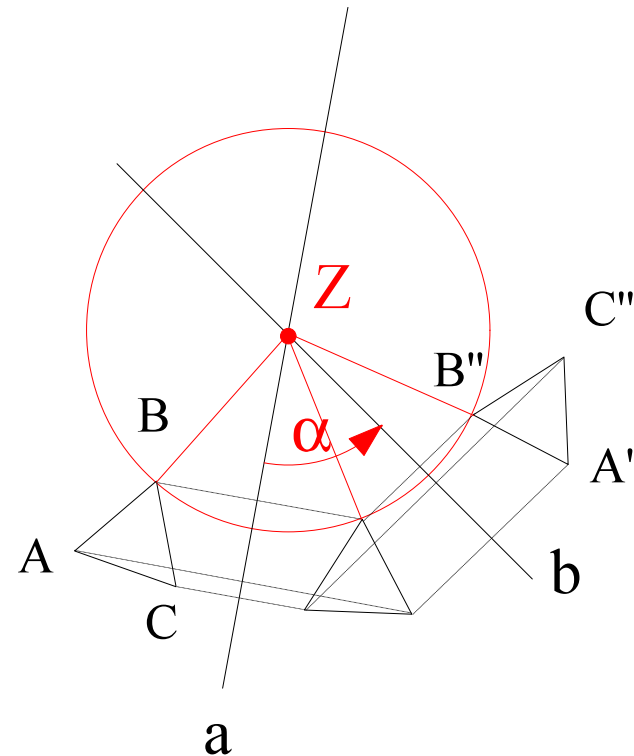
Werden zwei Geradenspiegelungen verknüpft, so ergibt sich eine Translation oder eine Rotation.

- a) Sind die beiden Geraden a und b parallel, so entsteht eine Translation mit dem Vektor $2v$.



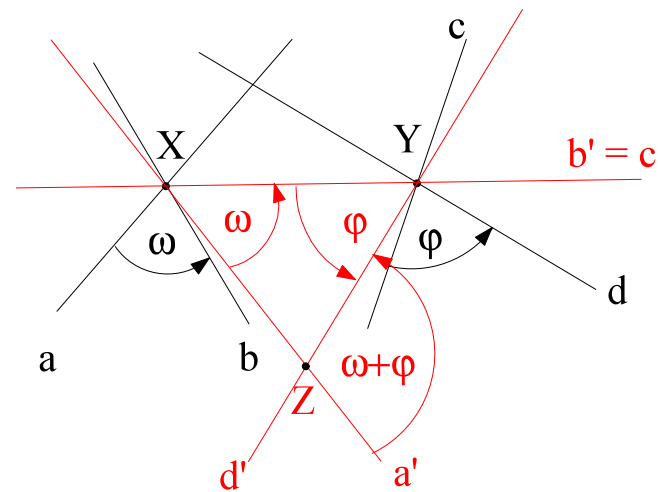
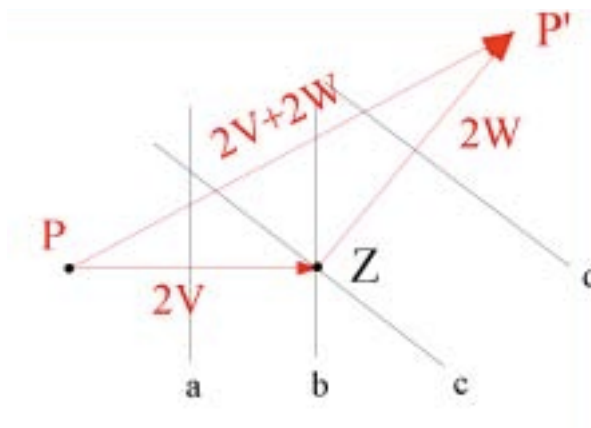
Die Idee der Symmetriegruppe

- b) Schneiden sich die beiden Geraden a und b im Punkt Z unter dem orientierten Winkel α , so entsteht eine Rotation $R_{Z,2\alpha}$ um das Drehzentrum Z mit dem orientierten Winkel 2α .



Die Idee der Symmetriegruppe

- c) Werden zwei Translationen verknüpft, so ergibt sich wieder eine Translation.
- d) Werden zwei Rotationen verknüpft, so ergibt sich wieder eine Rotation oder eine Translation.
- e) Usw.



Die Idee der Symmetriegruppe

Es sei nun irgendeine ebene symmetrische Figur gegeben. Sind S und T zwei *Symmetrietransformationen* dieser Figur, so ist auch ihre Verknüpfung $T \circ S$ eine *Symmetrietransformation* der Figur.

Für die Verknüpfung von Symmetrien gelten nun die folgenden *Regeln*, wobei I die identische Abbildung bedeutet:

- (G1) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ (Assoziativität)
- (G2) $T \circ I = I \circ T = T$ (neutrales Element I)
- (G3) Zur Symmetrie T gibt es eine (eindeutige) inverse Symmetrie T^{-1} mit
 $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (inverses Element T^{-1})

Die Idee der Symmetriegruppe

Ein Rechenbereich mit einer zweistelligen Operation heißt **Gruppe**, falls die drei Rechenregeln (G1), (G2) und (G3) in diesem Bereich uneingeschränkt gelten.

Besteht der Rechenbereich aus allen *Symmetrietransformationen einer gegebenen Figur*, und betrachtet man deren *Verknüpfung* als zweistellige Operation, so nennt man die dabei entstehende Gruppe die **Symmetriegruppe** der betreffenden Figur.

Wir betrachten im Folgenden das Beispiel der Symmetriegruppe eines ganz einfachen Rosettenornaments – das Beispiel einer *Rosettengruppe*.

Beispiel einer Symmetriegruppe

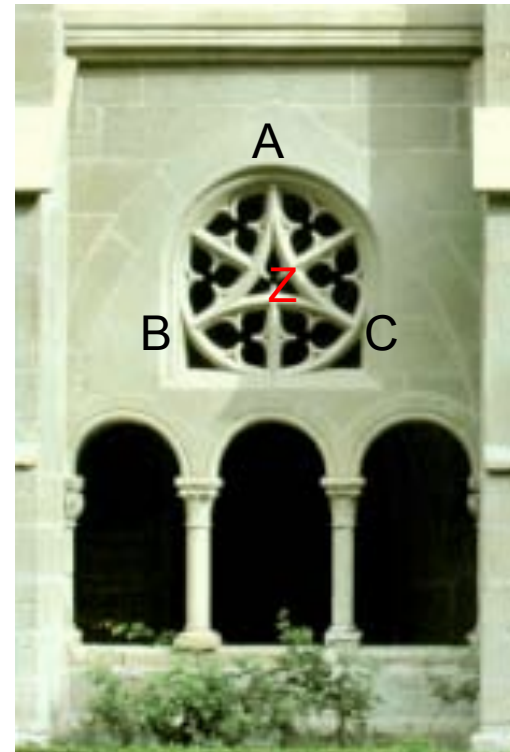
Die Symmetrietransformationen sind:

- Geradenspiegelungen S_a, S_b, S_c :
Achsen durch A, B und C
- Drehungen: um das Zentrum Z
mit den orientierten Drehwinkeln
 $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ (Identität):
 $R_{Z,120}, R_{Z,240}, I$
- Verknüpfungen

Z.B. $R_{Z,120^\circ} \circ R_{Z,120^\circ} = R_{Z,240^\circ}$

oder $S_b \circ S_a = R_{Z,240^\circ}$

oder $R_{Z,120^\circ} \circ S_c = S_b$



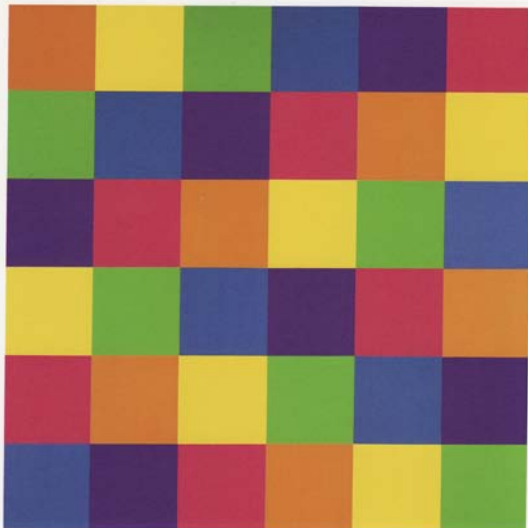
Beispiel einer Symmetriegruppe

Diedergruppe D_3 : Gruppentafel

\circ	\mathbb{I}	R_{120°	R_{240°	S_a	S_b	S_c
\mathbb{I}	\mathbb{I}	R_{120°	R_{240°	S_a	S_b	S_c
R_{120°	R_{120°	R_{240°	\mathbb{I}	S_c	S_a	S_b
R_{240°	R_{240°	\mathbb{I}	R_{120°	S_b	S_c	S_a
S_a	S_a	S_b	S_c	\mathbb{I}	R_{120°	R_{240°
S_b	S_b	S_c	S_a	R_{240°	\mathbb{I}	R_{120°
S_c	S_c	S_a	S_b	R_{120°	R_{240°	\mathbb{I}

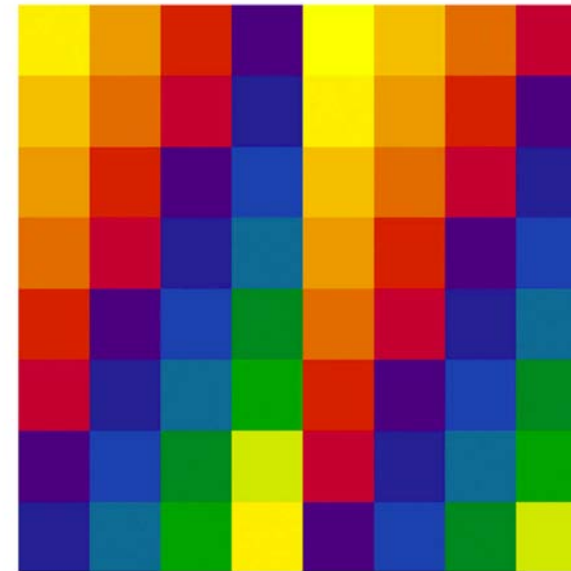
Eingefärbte Gruppentafel (Diedergruppe D_3)

Exkurs: Werke von Richard Paul Lohse



Richard Paul Lohse (1902-1988)

Complementary groups through six horizontal systematic colour series
1950/1987
acrylic on canvas 150 x 150 cm



Richard Paul Lohse (1902-1988)

Acht vertikale systematische Farbreihen

1955/1969

Klassifikation der ebenen symmetrischen Figuren nach ihrer Symmetriegruppe

Die Vielfalt der symmetrischen Figuren ist unermesslich.

Eine Klassifikation bringt Ordnung in diese Vielfalt.

Sie hilft uns zunächst, dass wir Symmetrien überhaupt erkennen.

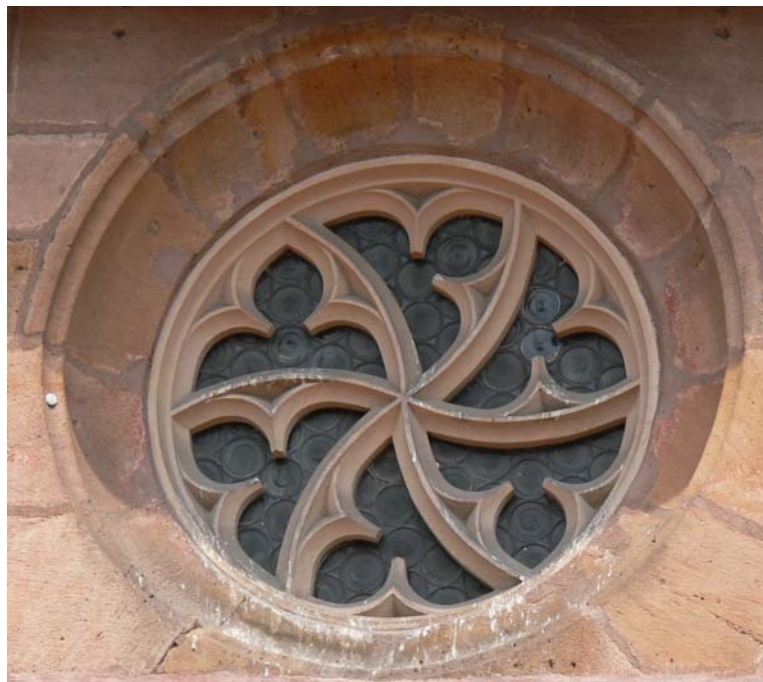
Sie hilft uns aber auch, dass wir die Mannigfaltigkeit der Ornamente einordnen und verstehen können.

Klassifikation der ebenen symmetrischen Figuren nach ihrer Symmetriegruppe

a) Rosettengruppen:

Zu jeder Zahl n gibt es Symmetriegruppen C_n und D_n

hier $n = 6$

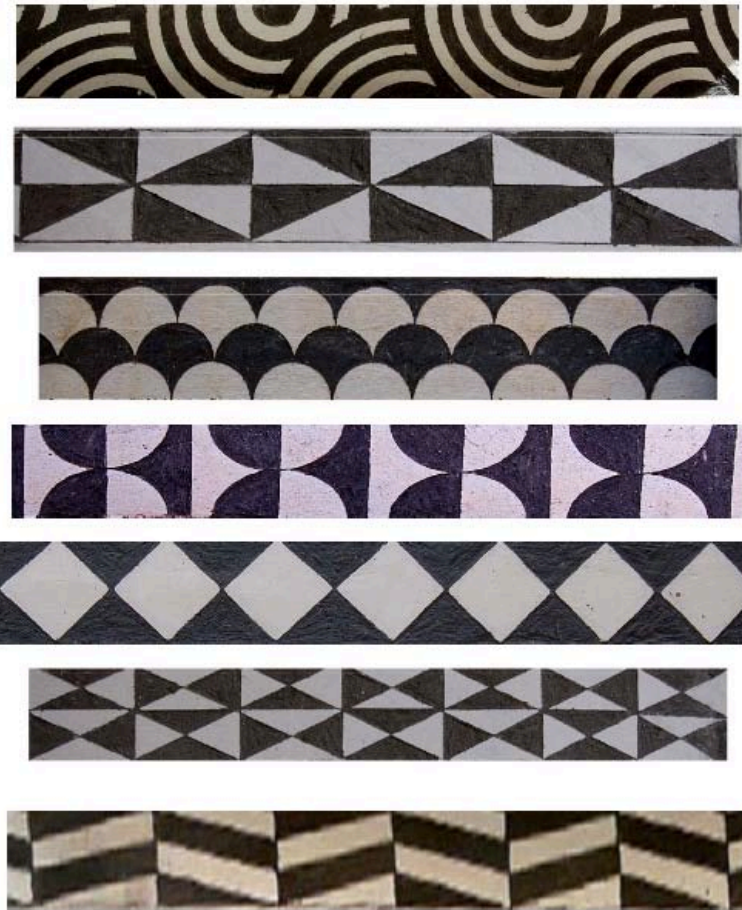


Klassifikation der ebenen symmetrischen Figuren nach ihrer Symmetriegruppe

b) **Bandornamente (Frieze)**

Es gibt genau *sieben*
verschiedene Friesgruppen.

In diesem Sinne gibt es also
genau *sieben* verschiedene
Klassen von Friesen.



Klassifikation der ebenen symmetrischen Figuren nach ihrer Symmetriegruppe

c) Flächenornamente (Wandmuster)

Es gibt genau **17** Gruppen
von Flächenornamenten.

In diesem Sinne gibt es also
genau **17** Klassen von solchen
Ornamenten.

E. S. Fedorov 1891

George Polya

Paul Niggli 1924

